針と同心円が交わる確率についての考察

北海道滝川高等学校　理数科１班
上野 楓悟 ・ 上口 悠太 ・ 竹内 和

Ⅰ．はじめに

ビュフォンの針とは１８世紀の博物学者コント・ド・ビュフォンが提起した確率の問題である。

間隔ｄの平行線の上に長さℓ の針を落とし、針と線が交わる確率を求める。その確率は

$$\frac{2\ell}{\pi d}$$

となる。私たちは確率の中にπが出てくることに興味を持ち、課題研究のテーマにした。

そこで私たちは平行線を同心円に変えて確率を求めることにした。私たちは平行線よりも交わりやすい、つまり確率は大きくなると予想した。

Ⅱ．実験

まず実際に平行線を同心円に変えて針を落として交わる確率を求めた。方法は以下の通りである。

① 適当な大きさの紙に半径１０ｃｍの同心円を作る。
② ６ｃｍの針を用意する。(今回は市販のシャープペンシルの芯を用いた。)
③ 同心円の紙を床に固定し、高さ１ｍから板に乗せた針を１０本同時に落とす。
④ 計１万本投げて同心円と交わった針の本数を数える

Ⅲ．結果

実験の結果、交わった数の平均は１０本あたり、３.６３３となった。また、グラフ（後述、図４）に表すと一定の値に収束することがわかった。

Ⅳ．理論計算・考察

長さℓ の針をある点 O を中心とする半径 r,2r,3r,…,nr の円が並ぶ同心円上に投げる。ここではℓ ＜r とする。

この円と針の交わる確率を求めていく。

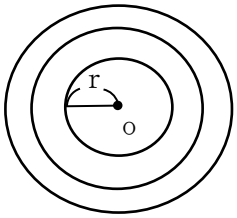

図１　同心円のイメージ図

針と円が交わる点における接線と針の成す角をθとする。$(0 \leq \theta \leq 90)$

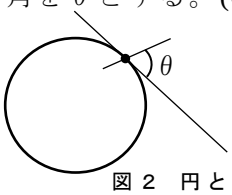

図２　円と針の交点とその点における接線

針と円が交わるときの針の中心の存在範囲の領域の面積を計算し、

ある自然数 k=1,2,3,…,n のときのその面積を$\{D_k\}= D_1,D_2,D_3,\cdots,D_n$とすると、

求める確率は、以下の通りである。

$$\frac{\text{交わる領域の面積}}{\text{全体の面積}} = \frac{D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_n}{\pi n^2 r^2}$$

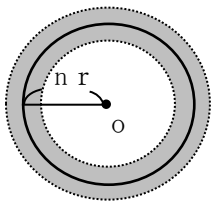

図３　円と針が交わる領域の面積（塗りつぶし部分）

ここで、分母の値は、

$$D_1 + D_2 + D_3 + \cdots + D_n = 2\ell r\,\pi \sin\theta\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$
$$= n(n+1)\ell r\pi \sin\theta$$

であるから、求める確率は以下に示す通り。

$$\frac{(n+1)\ell \sin\theta}{nr}$$

ただしこの確率は角度θに依存する確率であり、まだ十分とは言えない。

Ⅴ.謝辞

この研究に協力してくださった先生・生徒の皆様、ご協力ありがとうございました。

Ⅵ. 研究要旨

私たちの研究は「ビュフォンの針」という確率の問題について興味を持ったのが始まりである。「ビュフォンの針」は平行線と針についての問題だが、我々は平行線を円にした場合どうなるのかという疑問から研究を始めた。まず、計 1000 回針を投げ、針と同心円が交わる確率はどれくらいの値に収束するのかを実測し求めた。

その結果、１本あたり約３６％の確率で交わることが分かった

次に理論的に計算をおこなった（Ⅳを参照）。その結果、以下の式が求まった。

$$\frac{(n+1)\ell \sin\theta}{nr}$$

ただし、n は自然数、ℓ は針の長さ、r は同心円の間隔、θは針と円が交わる角度である。ただ、私たちの研究はまだ不十分な点が多く、これからも考察を深める必要がある。

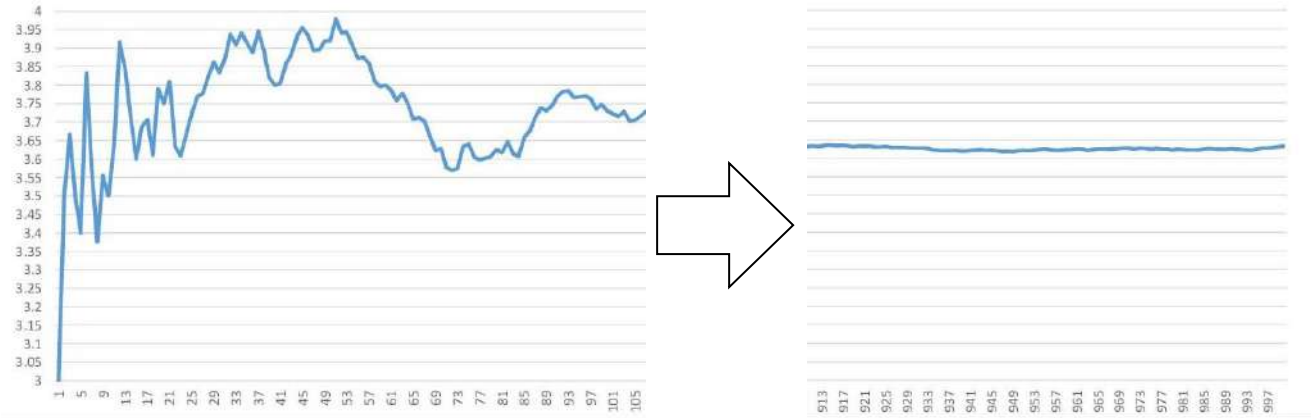

図４ 実験結果のグラフ